Onsdag 1. mai - R1-innspurt

onsdag 1. mai 2019 18:43

Oppgave 5 (6 poeng)

La K være grafen til vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t)=[\ln t, t\cdot \ln t - t], \quad t>0$$

a) Finn skjæringspunktene mellom K og koordinataksene.

b) Vis at punktet $P(2, e^2)$ ligger på K.

c) Finn $\vec{r}\,'(t)$.

d) Finn en parameterframstilling for tangenten til K i punktet P.

a) Skjæring med y-akse

$\ln t = 0$

$t = e^0 = 1$

$\vec{r}(1) = [\ln 1, 1\cdot \ln 1 - 1]$

$= [0, -1]$

Skjæring med x-akse

$t \cdot \ln t - t = 0$

$t(\ln t - 1) = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad \ln t - 1 = 0$

$\ln t = 1$

$t = e$

$\vec{r}(e) = [\ln e, e\cdot \ln e - e]$

$= [1, 0]$

b) $P(2, e^2)$

$\ln t = 2$

$t = e^2$

$\vec{r}(e^2) = [\ln e^2, e^2 \cdot \ln e^2 - e^2]$

$= [2, e^2 \cdot 2 - e^2]$
$= [2, e^2]$

c) $\vec{r}(t) = [\ln t, t\ln t - t]$

$f(x) = \boxed{x \cdot \ln x} \boxed{-x}$

$(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$u = x \quad u' = 1$

$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \ln x + 1 \boxed{-1} = \ln x$

$\vec{r}'(t) = [\frac{1}{t}, \ln t]$

d)

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

$x_0 = 2$
$y_0 = e^2$

$\vec{r}'(e^2) = [\frac{1}{e^2}, \ln e^2]$
$= [e^{-2}, 2]$

$$l: \begin{cases} x = 2 + e^{-2}t \\ y = e^2 + 2t \end{cases}$$

5 per

Trekker 2 av dem

a) To av disse fem skal danne en ryddegruppe. $nCr \quad 5C2 = \binom{5}{2}$

$= \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

To av disse fem skal løpe en stafett.

$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$

$5P_2 = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = \underline{\underline{20}}$

Oppgave 1

a Du kaster tre tikroner.
Hva er sannsynligheten for at du får to mynt?

b Du kaster fire femkroner.
Hva er sannsynligheten for at du får minst to mynt?

a) $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$= \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$= 3 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{4!\,0!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{16}$

$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \frac{1}{16}$

$= 4 \cdot \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = 1 - \frac{5}{16} = \underline{\underline{\frac{11}{16}}}$

Oppgave 3

Ta for deg funksjonen g gitt ved $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$.

a Bestem nullpunktet til g.
b Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.
c Undersøk om grafen til g har asymptoter og bestem i så fall likningen for dem.
d Tegn grafen til g sammen med eventuelle asymptoter.

a) $x - 1 = 0$

$x = 1$

b) $(1, 0)$ x-akse

$\frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$

$(0, -\frac{1}{2})$ y-akse

c) $\frac{x-1}{2-x}$

Vertikal asym

$2 - x = 0$

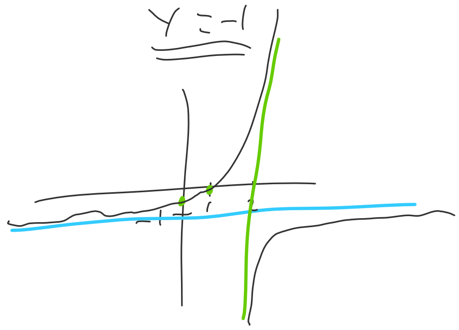
$\underline{\underline{x = 2}}$

Hori. Asymp.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

$$y = -1$$



Oppgave 10 (6 poeng)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ vet vi at $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$ og $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Videre er

$$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b} \text{ og } \vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$$

a) Finn $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) Finn $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$.

c) Finn $\angle(\vec{u},\vec{v})$.

d) La $\vec{w}=t\cdot\vec{a}-\vec{b}$.

Bestem tallet t slik at $\angle(\vec{u},\vec{w})=60°$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}$$

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0°$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \\ |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}\end{array}}$$

a) $\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}$

$v = 2\vec{a}-\vec{b}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$$

$$= 2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2$$

$$= 2\cdot 6^2 - 15 - 5^2$$

$$= 72 - 40 = 32$$

6*5*cos(120) = -15,0

$\vec{a}^2 = 6^2$

$\vec{b}^2 = 5^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2}$

$$= \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$$

$$= \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2}$$

$$= \sqrt{36 - 30 + 25}$$

$$= \sqrt{31}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2}$$

$$= \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 36 + 4 \cdot 15 + 5^2}$$

$$= \sqrt{144 + 60 + 25}$$

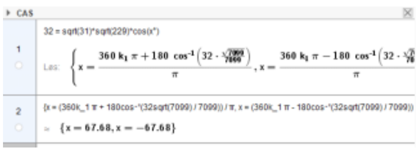
$$= \sqrt{229}$$

$|\vec{u}| = \sqrt{31}$

$|\vec{v}| = \sqrt{229}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$

$32 = \sqrt{31} \cdot \sqrt{229} \cdot \cos \alpha$



$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 67.7^\circ$

d) $\vec{w} = t \cdot \vec{a} - \vec{b}$

$\angle(\vec{u}, \vec{w}) = 60^\circ$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 60^\circ$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (t \cdot \vec{a} - \vec{b})$

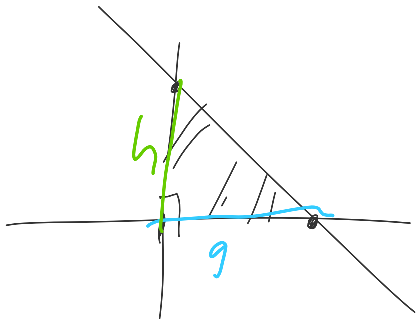
$= (t \cdot \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + t\vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2)$

$$= (t\cdot 36 + 15 - 15t - 25)$$
$$= 21t - 10$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{\vec{w}^2} = \sqrt{(t\cdot\vec{a} - \vec{b})^2}$$
$$= \sqrt{t^2\vec{a}^2 - 2t\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2}$$
$$= \sqrt{36t^2 + 30t + 25}$$

$$21t - 10 = \sqrt{31} \cdot \sqrt{36t^2 + 30t + 25} \cdot \cos 60°$$

3	21t-10=sqrt(31)*sqrt(36*t^2+30*t+25)*cos(60°)
	Løs: $\left\{t = \frac{25}{6}\right\}$



1	f(x) := 1/x^2
	→ $f(x) := \frac{1}{x^2}$
2	g(x) := Tangent(a, f)
	→ $g(x) := \frac{3a - 2x}{a^3}$
3	g(x) = 0
	Løs: $\left\{x = \frac{3}{2}a\right\}$
4	g(0)
	→ $\frac{3}{a^2}$
5	3/2*a*3/a^2/2
	→ $\frac{\frac{9}{4}}{a}$

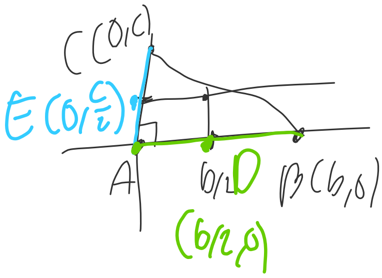
6	h(x) := 1/x^n
	→ $h(x) := \frac{1}{x^n}$
7	i(x) := Tangent(2, h)
	→ $i(x) := 2^{-n}\left(-\frac{1}{2}nx + n + 1\right)$
8	i(x) = 0
	Løs: $\left\{x = \frac{4n\cdot 2^{-n} + 4\cdot 2^{-n}}{n\cdot 2^{-n+1}}\right\}$
9	x_0:=HøyreSide($8,1)
	→ $x_0 := \frac{4n\cdot 2^{-n} + 4\cdot 2^{-n}}{n\cdot 2^{-n+1}}$
10	y_0 := i(0)
	→ $y_0 := 2^{-n}(n+1)$
11	x_0*y_0/2
	→ $\frac{1}{2}\cdot 2^{-n}(n+1)\,\frac{4\cdot 2^{-n}n + 4\cdot 2^{-n}}{2^{-n+1}n}$
12	x_0*y_0/2=2/3
	NLøs: $\{n = 3\}$

1	f(x) := x^2+4
	→ $f(x) := x^2 + 4$
2	Tangent(2, f)
	→ $y = 4x$
3	g(x) := k*x^2+4
	→ $g(x) := kx^2 + 4$
4	Tangent(a, g)
	→ $y = -a^2k + 2akx + 4$
5	-a^2k+4=0
	Løs: $\left\{a = -2\cdot\frac{\sqrt{k}}{k}, a = 2\cdot\frac{\sqrt{k}}{k}\right\}$
6	g(-2*sqrt(k)/k) {a = -2sqrt(k) / k, a = 2sqrt(k) / k}
	→ 8
7	g(2*sqrt(k)/k)
	→ 8

CAS

1	p(t) := (5t-13,5t-8) → $p(t) := (5t-13, 5t-8)$
2	r(t) := (t^3-9t,t^2-4) → $r(t) := (t^3-9t, t^2-4)$
3	r(0) → $(0, -4)$
4	r'(0) → $(-9, 0)$
5	p(t) = r(t) Løs: $\{t = 1\}$
6	p(1) → $(-8, -3)$
7	r(1) → $(-8, -3)$
8	p(t) = r(s) Løs: $\left\{\left\{s = 3, t = \frac{13}{5}\right\}, \{s = 1, t = 1\}, \left\{s = -3, t = \frac{13}{5}\right\}\right\}$

9	p'(t) → $(5, 5)$
10	r'(t) → $(3t^2-9, 2t)$
11	p'(t) = k*r'(t) Løs: $\left\{\left\{k = \frac{-10\sqrt{7}-5}{18}, t = \frac{-2\sqrt{7}+1}{3}\right\}, \left\{k = \frac{10\sqrt{7}-5}{18}, t = \frac{2\sqrt{7}+1}{3}\right\}\right\}$
12	r'((2*sqrt(7)+1)/3) → $\left(\frac{4\sqrt{7}+2}{3}, \frac{4\sqrt{7}+2}{3}\right)$



CAS

1	A := (0,0) → $A := (0, 0)$
2	B := (b,0) → $B := (b, 0)$
3	C := (0,c) → $C := (0, c)$
4	Midtnormal(A, B) → $x = \frac{1}{2}b$
5	Midtnormal(A, C) → $y = \frac{1}{2}c$
6	M := (1/2*b,1/2*c) → $M := \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$
7	D := (b/2,0) → $D := \left(\frac{b}{2}, 0\right)$
8	E := (0,c/2) → $E := \left(0, \frac{c}{2}\right)$

9	f(x) := Linje(C, D) → $f(x) := -2c\frac{x}{b} + c$
10	g(x) := Linje(B, E) → $g(x) := -c\frac{x}{2b} + \frac{1}{2}c$
11	g=f Løs: $\left\{x = \frac{1}{3}b\right\}$
12	g(1/3*b) → $\frac{1}{3}c$
13	T := (b/3,c/3) → $T := \left(\frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$
14	Linje(T, M) → $y = c\frac{x}{b}$

Oppgave 7 (4 poeng)

I ei eske ligger det 28 kuler. De er røde, blå og gule. Vi trekker tilfeldig 2 kuler uten tilbakelegging.

a) Hvor mange røde kuler er det i eska når sannsynligheten for å trekke to røde kuler er $\frac{1}{18}$?

b) Du vet nå hvor mange røde kuler det er.
Hvor mange blå og hvor mange gule kuler er det når sannsynligheten for å trekke 1 blå og 1 gul kule er $\frac{2}{7}$?

28 kuler
x røde

$$\frac{x}{28} \cdot \frac{x-1}{27} = \frac{1}{18}$$

1	x/28*(x-1)/(27)=1/18 Løs: $\{x = -6, x = 7\}$

7 røde kuler

b) 28 totalt

7 røde

x blå

28−7−x gule

$$\frac{x}{28} \cdot \frac{28-7-x}{27} + \frac{28-7-x}{28} \cdot \frac{x}{27} = \frac{2}{7}$$

$$2 \cdot \left(\frac{28-7-x}{28} \cdot \frac{x}{27} \right) = \frac{2}{7}$$

2 2*((28-7-x)/28*x/27)=2/7

Løs: $\{x = 9, x = 12\}$

Oppgave 5 (2 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [-3, 2]$, $\vec{b} = [4, s]$ og $\vec{c} = [6, t-2]$.

a) Bestem s ved regning, slik at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Bestem t ved regning, slik at $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

$$\vec{a} = k \cdot \vec{c}$$

$$[-3, 2] = [6k, k(t-2)]$$

$$-3 = 6k \;\wedge\; 2 = k(t-2)$$

$$\underline{\underline{k = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}}} \;\wedge\; 2 = -\frac{1}{2}(t-2) \quad | \cdot -2$$

$$-4 = t-2$$

$$\underline{\underline{t = -2}}$$

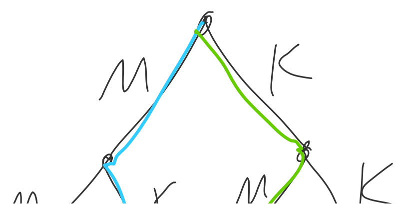
Oppgave 7 (3 poeng)

Fra ei gruppe på 5 menn og 4 kvinner skal det trekkes tilfeldig ut 2 personer. Samme person kan ikke trekkes ut to ganger.

a) Regn ut sannsynligheten for at det blir trukket ut én mann og én kvinne, ved å bruke betinget sannsynlighet.

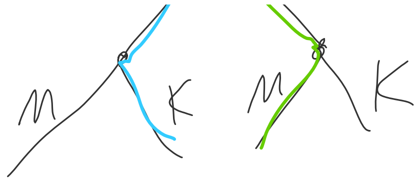
b) Regn ut sannsynligheten for at det blir trukket ut én mann og én kvinne, ved å bruke en hypergeometrisk modell.

a)



5 menn

4 kvinner



4kvinner

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=2\cdot\frac{\cancel{4}}{9}\cdot\frac{5}{\cancel{8}2}=\frac{10}{18}=\underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$

b)

5menn

4kvinner

2 trekk

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\frac{5\cdot 4}{\frac{9!}{2!7!}}$$

$$=\frac{5\cdot 4}{\frac{9\cdot\cancel{8}4}{\cancel{2}}}=\frac{20}{36}=\frac{10}{18}=\underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$