Oppgave 8.207

En vektorfunksjon er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 + 2t,\ t + 2]$$

a) Finn ved regning skjæringspunktene mellom grafen til $\vec{r}$ og koordinataksene.

b) Finn $\vec{r}\,'(t)$.

c) Finn en parameterframstilling for tangenten T i det punktet på grafen der $t = -3$.

a) X-akse:

$$t + 2 = 0$$
$$\underline{\underline{t = -2}}$$

$$\vec{r}(-2) = [(-2)^2 + 2\cdot(-2),\ -2 + 2]$$
$$= [0, 0]$$

Y-akse:

$$t^2 + 2t = 0$$
$$t(t+2) = 0$$
$$t = 0 \lor t + 2 = 0$$
$$t = -2$$

$$\vec{r}(0) = [0^2 + 2\cdot 0,\ 0 + 2]$$
$$= [0, 2]$$

b) $\vec{r}\,'(t) = [2t + 2,\ 1]$

$\vec{v}(t) = [2t + 2,\ 1]$

c) $\vec{r}(-3) = [(-3)^2 + 2\cdot(-3),\ -3 + 2]$

$= [3, -1]$

$$T: \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$\vec{r}\,'(-3) = [2\cdot(-3) + 2,\ 1]$

$= [-4, 1]$

Opp4

H17

	CAS
1	op(t) := (80+4t,16+3t) → $op(t) := (4t + 80, 3t + 16)$
2	v(t) := op'(t) → $v(t) := (4, 3)$
3	abs(v(t)) → 5
4	abs(op(4)) → 100
5	100/4 → 25
6	Q := (-10,50) → $Q := (-10, 50)$
7	QP = QO + OP
8	O := (0,0) → $O := (0, 0)$
9	qp(t) := Vektor(Q, O) + op → $qp(t) := (4t + 90, 3t - 34)$
10	abs(qp(t)) = 35*t Løs: $\left\{t = \frac{7\sqrt{57009} + 129}{600}\right\}$
11	{t = (7sqrt(57009) + 129) / 600} ≈ $\{t = 3\}$

V17

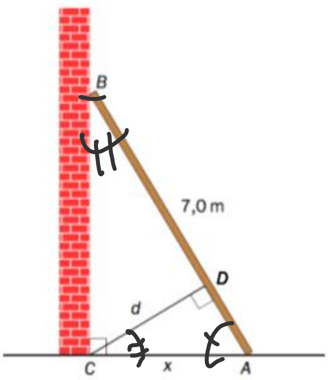
Oppgave 3 (4 poeng)

En stige på 7,0 m er stilt opp langs en vegg. Stigen danner sammen med veggen og bakken en rettvinklet ΔABC. Se figuren.

Vi setter $AC = x$. Den korteste avstanden fra C til stigen er d meter.

a) Vis at $d = \frac{x\sqrt{49 - x^2}}{7}$

b) Bestem x slik at d blir lengst mulig.
Hvor lang er d for denne verdien av x?



$$BC^2 + x^2 = 7^2$$
$$BC^2 = 7^2 - x^2$$
$$\underline{\underline{BC = \sqrt{49 - x^2}}}$$

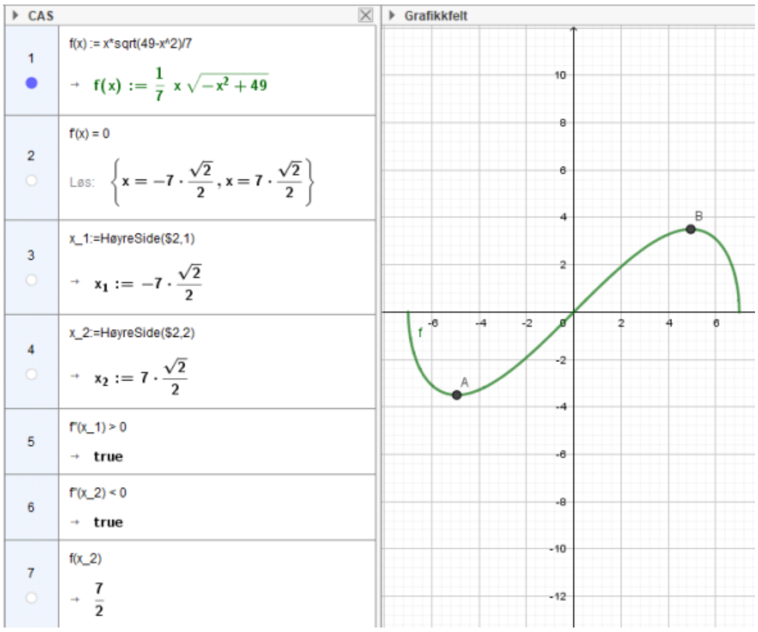
$$\boxed{\begin{aligned} AD^2 + d^2 &= x^2 \\ AD^2 &= x^2 - d^2 \\ AD &= \sqrt{x^2 - d^2} \end{aligned}}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADC$$

$$\frac{d}{BC} = \frac{x}{7}$$

$$\frac{d}{\sqrt{49 - x^2}} = \frac{x}{7} \quad \Big| \cdot \sqrt{49 - x^2}$$

$$\underline{\underline{d = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}}}$$



Opg 4 V17

Grafen til f har tre tangenter som går gjennom punktet $A(4, 3)$.

b) Forklar at x-koordinaten til tangeringspunktene må være løsning av likningen

$$\frac{f(x)-3}{x-4} = f'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

$$\frac{f(x)-3}{x-4} = f'(x)$$

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$3 - f(x_0) = f'(x_0)(4 - x_0)$$

$$\frac{3 - f(x_0)}{4 - x_0} = f'(x_0)$$

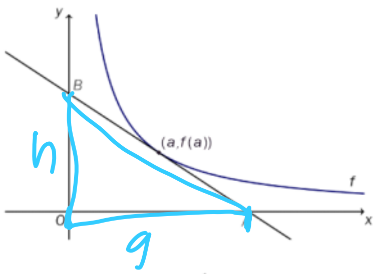
$$\frac{f(x_0) - 3}{x_0 - 4} = f'(x_0)$$

1	f(x) := 2x^3-6x^2+5x → $f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
2	A := (4,3) → $A := (4, 3)$
3	(f(x)-3)/(x-4)=f'(x) A:=(4, 3) Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15}+7}{2}, x = \frac{\sqrt{15}+7}{2}\right\}$
4	P := (a,b) → $P := (a, b)$
5	(f(x) - b)/(x-a) = f'(x) → $\frac{-2x^3+6x^2+b-5x}{a-x} = 6x^2 - 12x + 5$
6	Likningen over er en tredjegradslikning, med andre ord kan det være opptil 3 løsninger
7	x_1:=HøyreSide($3,1) → $x_1 := \frac{1}{2}$
8	x_2:=HøyreSide($3,2) → $x_2 := \frac{-\sqrt{15}+7}{2}$
9	x_3:=HøyreSide($3,3) → $x_3 := \frac{\sqrt{15}+7}{2}$

10	g:=Tangent(x_1,f) → $g: y = \frac{1}{2}x + 1$
11	h:=Tangent(x_2,f) → $h: y = \left(-15\sqrt{15}+59\right)x + 60\sqrt{15} - 233$
12	p:=Tangent(x_3,f) → $p: y = \left(15\sqrt{15}+59\right)x - 60\sqrt{15} - 233$

V12

Oppgave 3 (5 poeng)



Skissen ovenfor viser grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ og en tangent i punktet $(a, f(a))$.

a) Vis at likningen for tangenten er

$$y = -\frac{1}{a^2}\cdot x + \frac{2}{a}$$

Tangenten skjærer koordinataksene i A og B.

b) Bestem koordinatene til A og B.

c) Bestem arealet av ΔOAB. Kommenter svaret.

a) $y - y_0 = s(x - x_0)$

$y_0 = f(a) = \frac{1}{a}$

$x_0 = a$

$s = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$

$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}\cdot x + \frac{1}{a}$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{a^2}\cdot x + \frac{2}{a}}}$$

b) x-akse

$-\frac{1}{a^2}\cdot x + \frac{2}{a} = 0$

$-\frac{x}{a^2} = -\frac{2}{a} \quad \left(\cdot -a^2\right.$

$$\underline{\underline{x = 2a}}$$

$$\underline{\underline{A(2a, 0)}}$$

y-akse

$$-\frac{1}{a^2}\cdot 0 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\underline{\underline{B(0, \tfrac{2}{a})}}$$

c) ΔOAB

$$A = \frac{gh}{2} = \frac{2\cancel{a}\cdot\frac{2}{\cancel{a}}\cdot 1}{2}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

H17

Oppgave 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{1-x}$$

Grafen til f har en tangent som går gjennom origo. Bestem likningen for denne tangenten.

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y = ax \boxed{-ax_0 + y_0}$$

$$-ax_0 + y_0 = 0$$

$$y_0 = ax_0$$

$$a = \frac{y_0}{x_0}$$

$$f(x) = e^{1-x}$$

$$f'(x) = -1e^{1-x}$$

$$= -e^{1-x}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

$$x_0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{e^{1-x_0}}{-e^{1-x_0}} = -1$$

$$x_0 = -1$$

$$f'(-1) = -e^{1-(-1)} = -e^2$$

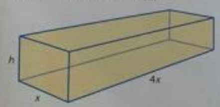
$$y_0 = f(-1) = e^{1-(-1)} = e^2$$

$$y - e^2 = -e^2(x+1)$$

$$y - e^2 = -e^2x - e^2$$

$$\underline{\underline{y = -e^2x}}$$

Oppgave 8.311 (Eksamen V-2011)
Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^2. Vi setter bredden lik x cm. Se skissen.



a) Vis at
$$h = \frac{50}{x^2}$$

b) Vis at overflaten av prismet kan skrives
$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

c) I oppgave 8.220a viste du at
$$O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2}$$
Bruk den deriverte til å finne den minste overflaten O som prismet kan ha.
Hva er lengden, bredden og høyden nå?

Vi har et annet rett prisme der lengden av grunnflaten er *tre* ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3.

d) Finn den minste overflaten som dette prismet kan ha.

a) $l \cdot b \cdot h = 200$

$4x \cdot x \cdot h = 200 \quad | : 4x^2$

$h = \frac{200}{4x^2} = \frac{50}{x^2}$

b) $h \cdot x \cdot 2 + 4x \cdot h \cdot 2 + x \cdot 4x \cdot 2$

$O(x) = 2xh + 8xh + 8x^2$

$= 10xh + 8x^2$

$= \frac{10 \cdot x \cdot 50}{x^2} + 8x^2 = \underline{\underline{\frac{500}{x} + 8x^2}}$

c) $\frac{-500 + 16x^3}{x^2} = 0$

$-500 + 16x^3 = 0$

$16x^3 = 500$

$x^3 = \frac{500}{16} = \frac{125}{4}$

CAS

1	Løs(x*3x*h=200, h)	$\rightarrow \left\{ h = \frac{200}{3x^2} \right\}$
2	hoyde := 200/(3x^2)	$\rightarrow$ hoyde $:= \frac{200}{3x^2}$
3	bredde := x	$\rightarrow$ bredde $:= x$
4	lengde := 3x	$\rightarrow$ lengde $:= 3x$
5	O(x) := hoyde*bredde*2+lengde*hoyde*2+bredde*lengde*2	$\rightarrow O(x) := \frac{18x^3 + 1600}{3x}$
6	O'(x) = 0	Løs: $\left\{ x = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{150}}{3} \right\}$
7	x_1:=HøyreSide($6,1)	$\rightarrow x_1 := 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{150}}{3}$
8	O(x_1)	$\rightarrow 8 \sqrt[3]{150}^2$
9	8cbrt(150)²	$= 225.85$
10	O''(x_1) >0	$=$ true